# 15 ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

## 15.1 Счет на установление

Стационарные решения эволюционных задач.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\Delta u(x) = -f(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in G \tag{125}$$

$$u(x)\big|_{\Gamma} = \mu(x), \quad \Gamma = \partial G \tag{126}$$

где $G$ – есть многомерная замкнутая область с границей $\Gamma$. В отличие от эволюционных задач постановка 125) не содержит начальных условий.

Задачу (125, 126) будем называть стационарной. Наряду с ней рассмотрим эволюционную задачу для параболического уравнения с теми же граничными условиями и произвольно выбранными начальными данными:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{v}(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x) + f(x), \quad x \in G, \quad 0 \le t < +\infty, \\ &\mathrm{v}(x,t)\big|_{\Gamma} = \mu(x), \quad \Gamma = \partial G, \\ &\mathrm{v}(x,0) = \mathrm{v}_0(x) \end{aligned} \tag{127}$$

В курсах математической физики показано, что при $t \to \infty$ решение эволюционной задачи (127) среднеквадратично сходится к решению $u(x)$ стационарной задачи (125, 126).

Таким образом, вместо задачи (125, 126) для эллиптического уравнения можно взять эволюционную задачу (127) для параболического уравнения с тем же пространственным оператором, произвольно выбрать начальные данные и вычислить решение $\mathrm{v}(x,t)$ при достаточно большом $t$. Стационарный (не зависящий от времени) предел $u(x)$, к которому стремится $\mathrm{v}(x,t)$ при $t \to \infty$ и будет решением стационарной задачи (127).

Этот способ называется счетом на установление. Он позволяет осуществить численное решение эллиптических задач хорошо разработанными методами решения параболических задач, например, продольно-поперечной схемой для двумерных задач и локально-одномерными схемами в случае большего числа измерений.

## 15.2 Оптимальный шаг

Для расчета эволюционной $n$ – мерной задачи до момента $T$ используют экономичные разностные схемы. При этом шаги $\tau$ и $h_i, i = 1,2,\ldots,n$ выбирают достаточно малыми, чтобы обеспечить требуемую близость разностного решения к точному решению v*(x,t)* эволюционной задачи.

Однако, если шаг по времени выбран слишком малым, то расчет до момента $T$ потребует большого числа шагов, что неоправданно увеличит объем вычислений. Очевидно, должен существовать оптимальный шаг $\tau_0$.

В частности, для двумерной задачи Дирихле в прямоугольнике:

$$\begin{aligned} &u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = -f(x), \quad 0 < x_1 < a, \quad 0 < x_2 < b, \\ &u(x)\big|_{\Gamma} = \mu(x), \quad x = (x_1, x_2) \end{aligned} \tag{128}$$

которой соответствует эволюционная задача:

$$\begin{aligned} &\mathrm{v}_t = \mathrm{v}_{x_1x_1} + \mathrm{v}_{x_2x_2} + f(x), \quad 0 < x_1 < a, \quad 0 < x_2 < b, \\ &\mathrm{v}(x,t)\big|_{\Gamma} = \mu(x), \\ &\mathrm{v}(x,0) = \mathrm{v}_0(x) \end{aligned} \tag{129}$$

оптимальный шаг будет равен

$$\tau_0 \approx \frac{1}{\pi}\left(\frac{a^2}{N^2} + \frac{b^2}{M^2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-1/2} \tag{130}$$

где N – число узлов по $x_1$, M – число узлов по $x_2$. Соответствующее минимальное число шагов, необходимое для установления будет равно

$$K(\tau_0) \approx \frac{1}{\pi}\left(\frac{a^2}{N^2} + \frac{b^2}{M^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-1/2} \ln\frac{1}{\varepsilon} \tag{131}$$

где $\varepsilon$ - требуемая точность.

Пусть, например, a=b=1; N=M=10; $\varepsilon = 0{,}01$, тогда $\tau_0 \approx 0{,}03$, $K(\tau_0) \approx 8$.

## 15.3 Разностная аппроксимация задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Постановка задачи.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона: найти непрерывную в $\overline{G} = G \cup \Gamma$ функцию $u(x_1, x_2)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x_1, x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in G, \tag{132}$$

и граничному условию $u(x) = \mu(x), \quad x \in \Gamma$, где $G$ – прямоугольник, $G = \{0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$,

$\Gamma$ – его граница, $f(x), \mu(x)$ - заданные функции, предполагается, что они таковы, что решение задачи (132) существует, единственно и является достаточно гладкой функцией.

Введем в $\overline{G}$ прямоугольную сетку

$$\Omega_h = \left\{x_{ij} = (x_1^{(i)}, x_2^{(j)}),\ x_1^{(i)} = ih_1,\ i = 0,1,\ldots,N_1,\ h_1 N_1 = l_1;\quad x_2^{(j)} = jh_2,\ j = 0,1,\ldots,N_2,\ h_2 N_2 = l_2\right\}$$

с шагами $h_1$ по переменной $x_1$ и $h_2$ - по переменной $x_2$.

Обозначив $y_{ij} = y(x_{ij}),\ f_{ij} = f(x_{ij}), \quad x_{ij} \in \Omega_h$, сопоставим задаче Дирихле (132) следующую разностную схему:

$$\begin{aligned}
&\frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}}{h_2^2} = -f_{ij},\\
&i = 1,2,\ldots,N_1 - 1, \quad j = 1,2,\ldots,N_2 - 1,\\
&y_{i,0} = \mu(x_1^i, 0), \quad y_{i,N_2} = \mu(x_1^i, l_2), \quad i = 1,2,\ldots,N_1 - 1,\\
&y_{0,j} = \mu(0, x_2^j), \quad y_{N_1,j} = \mu(l_1, x_2^j), \quad j = 1,2,\ldots,N_2 - 1,
\end{aligned} \tag{133}$$

Построенная разностная схема имеет второй порядок погрешности аппроксимации по $h_1$ и по $h_2$ и представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $y_{ij}$, состоящую из $(N_1 - 1) \times (N_2 - 1)$ уравнений и стольких же неизвестных. Она является устойчивой по правой части и граничным условиям.

Матрица системы (133) характеризуется высоким порядком, сильной разреженностью (т.е. преобладанием нулевых элементов) и большим разбросом собственных чисел).

## 15.4 Методы Якоби и Зейделя

Метод Якоби записывается в виде

$$
\begin{aligned}
&2\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)y_{i,j}^{n+1}=\frac{y_{i+1,j}^{n}+y_{i-1,j}^{n}}{h_1^2}+\frac{y_{i,j+1}^{n}+y_{i,j-1}^{n}}{h_2^2}+f_{ij},\\
&i=1,2,\ldots,N_1-1,\quad j=1,2,\ldots,N_2-1,\quad n=0,1,\ldots\\
&y_{i,0}^{n+1}=\mu(x_1^i,0),\quad y_{i,N_2}^{n+1}=\mu(x_1^i,l_2),\quad i=1,2,\ldots,N_1-1,\\
&y_{0,j}^{n+1}=\mu(0,x_2^j),\quad y_{N_1,j}^{n+1}=\mu(l_1,x_2^j),\quad j=1,2,\ldots,N_2-1,
\end{aligned}
\tag{134}
$$

Здесь $y_{ij}^{n}$ - значения решения в точке $x_{ij}$ на n-й итерации, а $y_{ij}^{n+1}$ - на n+1-ой.

Метод Якоби требует $O(h^{-2})$ итераций для достижения заданной точности. Это очень медленная сходимость.

Рассмотрим метод Зейделя для системы (134). В общем случае метод Зейделя строится таким образом, чтобы в уравнении с номером *i*неизвестные, имеющие индекс, больший, чем *i*, вычислялись бы по значениям на *n*-ой итерации.

$$
\begin{aligned}
&\frac{y_{i+1,j}^{n}-2y_{i,j}^{n+1}+y_{i-1,j}^{n+1}}{h_1^2}+\frac{y_{i,j+1}^{n}-2y_{i,j}^{n+1}+y_{i,j-1}^{n+1}}{h_2^2}=-f_{ij},\\
&i=1,2,\ldots,N_1-1,\quad j=1,2,\ldots,N_2-1,\quad n=0,1,\ldots\\
&y_{i,0}^{n+1}=\mu(x_1^i,0),\quad y_{i,N_2}^{n+1}=\mu(x_1^i,l_2),\quad i=1,2,\ldots,N_1-1,\\
&y_{0,j}^{n+1}=\mu(0,x_2^j),\quad y_{N_1,j}^{n+1}=\mu(l_1,x_2^j),\quad j=1,2,\ldots,N_2-1,
\end{aligned}
\tag{135}
$$

Хотя метод Зейделя является неявным, нахождение значений $y_{ij}^{n+1}$ на новой итерации не представляет труда, поскольку оно сводится к обращению треугольной матрицы. Здесь нужно лишь правильно установить последовательность проведения вычислений.

Метод Зейделя сходится несколько быстрее, чем метод Якоби, однако число итераций, необходимое для достижения заданной точности, здесь также является величиной порядка $h^{-2}$.

## 15.5 Метод верхней релаксации

Для общей системы уравнений

$$Ay = f \tag{136}$$

метод верхней релаксации определяется следующим образом. Система (136) представляется в виде

$$(A_- + A_+ + D)y = f \tag{137}$$

где $A_+, A_-$ - нижняя треугольная и верхняя треугольная матрицы с нулевыми диагоналями, $D$ – диагональная матрица. Вводится итерационный параметр $\omega \in (0, 2)$, и итерации определяются формулами

$$A_- y_{n+1} + A_+ y_n + D(\frac{1}{\omega} y_{n+1} + (1 - \frac{1}{\omega}) y_n) = f \tag{138}$$

При $\omega = 1$ метод (138) совпадает с методом Зейделя

$$(A_- + D)y_{n+1} + A_+ y_n = f$$

В случае системы представлению (137) соответствует запись в виде

$$\left(\frac{y_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j-1}}{h_2^2}\right) + \left(\frac{y_{i+1,j}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j+1}}{h_2^2}\right) - 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) y_{i,j} = -f_{ij}, \tag{139}$$

Тогда метод верхней релаксации запишется в виде

$$\left(\frac{y_{i-1,j}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j-1}^{n+1}}{h_2^2}\right) + \left(\frac{y_{i+1,j}^{n}}{h_1^2} + \frac{y_{i,j+1}^{n}}{h_2^2}\right) - 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)\left(\frac{1}{\omega} y_{i,j}^{n+1} + (1 - \frac{1}{\omega}) y_{i,j}^{n}\right) = -f_{ij}, \tag{140}$$

$$i = 1,2,\ldots,N_1 - 1, \quad j = 1,2,\ldots,N_2 - 1, \quad n = 0,1,\ldots$$

Способ нахождения значений $y_{ij}^{n+1}$ на новой итерации тот же, что и в методе Зейделя, начиная от левого нижнего угла области $G$.

Основное преимущество метода верхней релаксации перед методом Зейделя состоит в существенном увеличении скорости сходимости при оптимальном выборе параметра $\omega$.

Можно доказать, что при $h_1 = h_2 = h$, оптимальный параметр $\omega$ равен $\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{\mu}}, \quad \mu = 4\sin^2 \frac{\pi h}{2}$. При этом необходимое число итераций для достижения точности $\varepsilon$ будет равно

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{2 \ln \varepsilon^{-1}}{\pi h} = O(\frac{1}{h}) \tag{141}$$

## 15.6 Случай криволинейной области

Если граница $\Gamma$ области $G$ криволинейна, то значения $y_{ij}$ для граничных узлов получают путем переноса значений из точек границы $\Gamma$. Погрешность, получаемую в результате такого переноса, можно значительно уменьшить, если значения функции $y(A_h)$ в этих узлах последовательно исправлять по формулам линейной интерполяции

$$\begin{aligned} &y^0(A_h) = u(A) \\ &y^n(A_h) = u(A) + \frac{y^{k-1}(B) - u(A)}{h+\delta}\delta, \\ &k = 1,2,\ldots \end{aligned} \qquad (142)$$

Где $A$ – ближайшая к $A_h$ точка границы $\Gamma$ ($u(A) = \mu(A)$, $B$ – ближайший к $A_h$ внутренний узел сетки $\Omega_h$ и $\delta$ - удаление узла $A_h$ от точки$A$, причем $\delta > 0$, если $A_h$ - внутренняя точка области G, и $\delta < 0$, если $A_h$ - внешняя точка области $G$. В частном случае, если узел $A_h$ лежит на границе $\Gamma$ ($(A_h \equiv A, \delta = 0)$, то имеем точно $y^n(A_h) = u(A) = \varphi(A)$.

На практике после некоторого шага $n$ можно считать $y^n(A_h)$ неизменными (например, если эти значения установятся с заданной степенью точности).